603. 領域ノ移動ニヨル Dirichlet ノ問題ノ解ノ変化ニツイテ

井上　正雄（阪大）

平面上ノ有界ナ領域[1] Ω ヲ考ヘ，コノ境界ヲ Σ，コノ Σ 上ニ定義サレタ連続実函数ヲ $f(z)$ トスル。

シカルトキ次ノ Wiener ノ定理ニヨリ Ω 内デノ調和函数が一意的ニ定メラレル。

Wiener ノ定理：

$f(z)$ ノ $\Omega+\Sigma$ 上ニヲケルーツノ連続接続[2] $\mathcal{F}(z)$ ヲ考ヘル。

ソシテ Ω 内ニ $\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ ナル単調増加スル（$\Omega_{n+1}\supset\Omega_n$）normal domain[3] ノ系列 $\{\Omega_n\}$ ヲ撰ビ，コノ Ω_n ニツイテ境界値 $\mathcal{F}(z)$ ナル調和函数即チ Dirichlet ノ問題ノ解ヲ $u(z,\mathcal{F},\Omega_n)$ トスルトキ，$u(z,\mathcal{F},\Omega_n)$ ハ $\mathcal{F}(z)$ 及ビ系列 $\{\Omega_n\}$ ノ撰ビ方ニ無関係ナル Ω 内デノーツノ有界ナ調和函数ニ収斂スル。

---

1) 有界ナル領域トイフノハ本質的ナ條件デハナイが，簡単ノタメカク仮定シテオク、且ツ領域ハスベテ単葉（Schlicht）ナモノヲ考ヘルコトニスル。

2) 連続接続 $\mathcal{F}(z)$ ハ次ノ條件ヲ満足スル函数ノコトデアル。
$z\in\Sigma$ ナラバ $\mathcal{F}(z)=f(z)$ 且ツ $\mathcal{F}(z)$ ハ $\Omega+\Sigma$ 上デ連続。

3) normal domain トハ境界上ノスベテノ点デ與ヘラレタ値ヲトルヤウナコノ領域内デノ調和函数が任意ノ境界上ニ與ヘラレタ連続函数ニ対シテ成立スルヤウナ領域ヲイフ。

コノ方法ニヨツテ得ラレル調和函数ヲ $U(z, F, \Omega)$ デ表ハスコトニスル。

コノ函数ハ領域 Ω ノ境界條件 $f(z)$ ニ対スル Dirichlet ノ問題ノ generalised solution ト呼バレルモノデアッテ，若シ Ω ガ normal ナラバ $U(z, F, \Omega)$ ハ普通ノ意味ニヲケル Dirichlet ノ問題ノ解トナルモノデアル。

コノ談話ニヲイテハ、アル特殊ナ領域ニ対シテ定理ノ系列 $\{\Omega_n\}$ ニ対スル $\Omega \supset \cdots\cdots \supset \Omega_{n+1} \supset \Omega_n$ ナル條件ヲ撤去出来ルコトヲ示スニアル。

ソノタメニ $f(z)$ ノ全有限平面上ニヲケル連続接続ヲ $F(z)$ トシ，$\lim \Omega_n = \Omega$ ナル任意ノ normal domain ノ系列 $\{\Omega_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} U(z, F, \Omega_n) = U(z, F, \Omega)$$

ガ成立スルタメノ條件ヲ考察スル。

コヽニ $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ハ次ノ意味ニ解釈スル。点 z ノ適当ナ一ツノ近傍ヲ画ケバコレガ充分先ノスベテノ Ω_n ニ含マレルトキ，カヽル点 z ノ集合ヲ $\{\Omega_n\}$ ノ核ト呼ビ，$\{\Omega_n\}$ ノ如何ナル部分系列 $\{\Omega_{n'}\}$ モ常ニ核トシテ Ω ヲ持ツトキ $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ トスル。

若シ normal domain ノ系列 $\{\Omega_n\}$ ガ Ω ニ関シテ任意ノ F ニ対シテ常ニ

$$\lim_{n\to\infty} U(z, F, \Omega_n) = U(z, F, \Omega)$$

ヲ満足スルトキ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W（Ω ニ関シテ）ヲ有スト

云ハウ。

以上ノ意味ニヨイテ Wiener ノ定理ハ次ノ如ク述ベラレル。

"$\Omega \supset \cdots\cdots \supset \Omega_{n+1} \supset \Omega_n$ 且ツ $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス。[4)]"

之ノ定理ニヨイテ領域ノ単調性ノ不必要ナルコトハ容易ニ示セル。即チ

"$\Omega \supset \Omega_n \quad n = 1, 2, \cdots\cdots$

且ツ $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス"

次ニ

"$\Omega_n \supset \Omega_{n+1} \supset \cdots\cdots \supset \Omega$ 且ツ $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ ガ存在スレバ，$\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス" コトガ証明サレル。

コレヨリ更ニ

"$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ ニ対シ

$$\Omega_n^* \supset \Omega_n \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

且ツ $\Omega_{n+1}^* \supset \Omega_n^* \supset \cdots\cdots \supset \Omega$，$\lim_{n\to\infty} \Omega_n^* = \Omega$ ナル $\{\Omega_n^*\}$ ヲ撰ブコトガ出来レバ，$\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス" コトガワカル。

従ッテ又，次ノコトガワカル。

"境界点ガ常ニ外点ノミノ収積点ト見ナシ得ル如キ領域 Ω ニ対シテ，$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ，$\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス"

---

4) 以下特ニコトワラナイ限リ常ニ normal domain ノ系列ヲノミ考ヘルコトニスル。

特例ノ場合トシテ

"有限個或無限個ノ Jordan curve デ囲マレタ領域 Ω ニ對シテ, $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナラバ, $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス"

シカシ以上ノコトデハ, 例ヘバ一ツノ bogen ヲ境界ニモツヤウナ領域ニ対シテノ條件が明瞭デナイ。

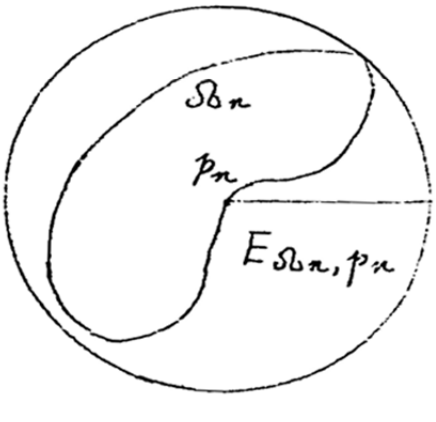
ソコデ $\{\Omega_n\}$ が次ノ條件ヲ滿足シテイルトシヤウ。

(C): Ω ノ regular ナ境界点 p ニヲイテ充分先ノ Ω_n ノ境界 Σ_n 上ニ夫々境界点 p_n ヲ次ノ如ク撰ブコトが出來ル。

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

且ツ　$\prod\limits_{n\geq N} E_{\Omega_n, p_n}$ が原点ヲ含ム一ツノ線分ヲ含ム。

コヽニ E_{Ω_n, p_n} ハ Ω_n ノ p_n ヲ原点トスル projection ヲ表ハス、即チ p_n ヲ中心トシ Ω_n ヲ含ム円ノウチ半徑ノ最小ノ円ヲ画キ, コノ円内ノ点デ Ω_n ニ含マレナイ点ノ p_n カラノ距離ノ集合ヲ E_{Ω_n, p_n} デ表ハス。従ツテコレハ 0 ヲ含ム正ノ実数カラナル閉集合デアル。



コノ條件ノ下ニ

$\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ が性質 W ヲ有スルコトヲ証明シヤウ。

Ω_n = 對シテ $\mathfrak{U}(z, \mathcal{F}, \Omega_n)$ ヲ作レバ之レハ一様ニ有界ナ調和函数ノ系列デアルカラ，任意ノ部分列ニ対シコレカラ更ニ適當ニ部分列 $\{\mathfrak{U}(z, \mathcal{F}, \Omega_{n'})\}$ ヲトッテ一ツノ函数ニ Ω デ一様收斂サスコトが出来ル。コノ函数ヲ $H(z)$ トスルトキ之レハ Ω デ有界ナ調和函数ナルコトハ明カデアル。

故ニ　$H(z) = \mathfrak{U}(z, \mathcal{F}, \Omega)$ ナルコト証明スレバ充分デアル。

ソノタメ $H(z)$ ノ Ω ノ *regular* ナ境界点 p ニヲケル値ヲ計算スル。（証明ハ Kellogg ノ方法ヲ少シ *modify* スレバヨイ）。

任意ニ正数 $\varepsilon\ (>0)$ ヲ與ヘタトキ

$|p - z| < \delta$ ナラバ $|\mathcal{F}(p) - \mathcal{F}(z)| < \varepsilon$ ナル如キ $\delta\ (>0)$ が定マル。

シカラバ勿論

$$|p - z| < \delta, \quad |p - z'| < \frac{\delta}{2} \text{ ナラバ } |\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z)| < 2\varepsilon$$

次ニ Ω ヲ完全ニ含ム一ツノ円ヲ C トスレバ

$$\underset{|p-z'|<\frac{\delta}{2},\ |p-z|\geq\delta,\ z\in C}{\mathrm{O.G.}} \left| \frac{\mathcal{F}(z') - \mathcal{F}(z)}{z' - z} \right| = M$$

ナル有限値 M ヲ定メルコトが出來ル。

故ニ

$$z \in C, \quad |p - z'| < \frac{\delta}{2} \text{ ニ對シテ}$$

$$\mathcal{F}(z') - M|z' - z| - 2\varepsilon < \mathcal{F}(z) < \mathcal{F}(z') + M|z' - z| + 2\varepsilon$$

z'トシテ トク=條件(C)=於ケル p_n'ヲトレバ

$$\mathcal{F}(p_{n'})-M|p_{n'}-z|-2\varepsilon<\mathcal{F}(z)<\mathcal{F}(p_{n'})+M|p_{n'}-z|+2\varepsilon$$

$\Omega_{n'}$=對シ、コノ境界上ノ点ノ値ガ $p_{n'}$カラノ距離=ナル如キ $\Omega_{n'}$ノ内デノ調和函數ヲ $V(z;p_{n'})$ トスレバ,

$$z\in\Omega_{n'} \text{ ナラバ } |p_{n'}-z|<V(z;p_{n'})$$

從ツテ $z\in\Omega_{n'}$ ナラバ

$$\mathcal{F}(p_{n'})-MV(z;p_{n'})-2\varepsilon<\mathcal{F}(z)<\mathcal{F}(p_{n'})+MV(z;p_{n'})+2\varepsilon$$

故=

$$\mathcal{F}(p_{n'})-MV(z;p_{n'})-2\varepsilon<\mathcal{U}(z,\mathcal{F},\Omega_{n'})<\mathcal{F}(p_{n'})+MV(z;p_{n'})+2\varepsilon$$

條件ノ $\prod_{n'>N}E_{\Omega_{n'},p_{n'}}$ ガ含ムーツノ線分ヲ ℓ(原点ヲ含ム)トシ,更=原点ヲ中心トスル充分大ナル半径ノ円Eヲ画キ,Eカラ ℓ ヲ切リ取ッタ領域ヲΔトシ,充分先ノ n'=対シ $\Delta\supset E_{\Omega_{n'},p_{n'}}$ ナラシメル。

コノΔ=對シテ境界上ノ値ガ原点カラノ距離=ナル如キΔ内デノ調和函数ヲ $V(z)$ トスレバ(Δハ normal domain),充分先ノ n'=対シテハ

$$V(z;p_{n'})\leq V(-|p_{n'}-z|)^{5)}$$ トナル。

故=

---

5) 例ヘバ Beurling, thèse. 參照

$$\mathcal{F}(p_{n'}) - MV(-|p_{n'} - z|) - 2\varepsilon < \mathcal{U}(z, \mathcal{F}, \Omega_{n'})$$
$$< \mathcal{F}(p_{n'}) + MV(-|p_{n'} - z|) + 2\varepsilon$$

シカルニ $z \in \Omega$ ナラバ，z ハ充分先ノスベテノ $\Omega_{n'}$ ニ含マレルカラ

$$\mathcal{F}(p) - MV(-|p-z|) - 2\varepsilon \leq \lim_{n' \to \infty} \mathcal{U}(z, \mathcal{F}, \Omega_{n'})$$
$$= H(z) \leq \mathcal{F}(p) + MV(-|p-z|) + 2\varepsilon$$

更ニ $\lim_{z \to p} V(-|p-z|) = 0$ ナル故

$$\mathcal{F}(p) - 2\varepsilon \leq \varliminf_{z \to p} H(z) \leqq \varlimsup_{z \to p} H(z) \leq \mathcal{F}(p) + 2\varepsilon$$

ε ハ任意デアツタカラ

$$\lim_{z \to p} H(z) = \mathcal{F}(p) = f(p)$$

$H(z)$ ハ有界且ツ Ω ノ regular ナ境界点 p デ $\lim_{z \to p} H(z) = f(p)$ ナル故ニ $H(z) = \mathcal{U}(z, \mathcal{F}, \Omega)$[6] トナル。

故ニ，結局

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{U}(z, \mathcal{F}, \Omega_n) = \mathcal{U}(z, \mathcal{F}, \Omega)$$

即チ "$\lim_{n \to \infty} \Omega_n = \Omega$ ナル $\{\Omega_n\}$ ガ條件 (C) ヲ満足スレバ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス"

従ツテ又コレヨリ容易ニ次ノコトヲ知ル。

"Ω ヲ有限次連結領域トスルトキ

---

6) Kellogg ノ定理（平面ノ場合）

$\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ 且ツ Ω_n ノ連結度ガ有界ナラバ $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス。（但シ Ω_n ハ normal デナクテモヨイ）"

換言スレバ連結度ガ有界ナ領域（必ズシモ normal タルヲ要シナイ）ヲノミ考ヘルコトニスレバ，コレラノ領域ニ関スル一ツノ連続函数ニ対スル Dirichlet ノ問題ヲ領域ノ一ツノ汎函数ト見テ連続ナルコトガ解ッタ。

シカシ領域ノ連結度ノ有界ナルコトハ果シテ本質的ナ條件デアラウカ？——

即チ任意ノ領域 Ω ニ対シ $\lim_{n\to\infty}\Omega_n=\Omega$ ナル normal domain[7]ノ系列 $\{\Omega_n\}$ ハ性質 W ヲ有ス？——ト云フ問題ガ残ル。

コレガ自分ニハ未ダ解決シ得ナイ處デアル。読者諸兄ノ御教示ヲ御希ヒシタイ。

(注意)： 以上ニオケル考察ハ境界 Σ ノ ensemble impropre e ノ近傍ヲ除外シテ云ハルレバ，ソレデ充分ナルコトハ e ノ性質ヨリシテ明カナルコトデアル。

---

7) コノ normal ナル條件ハ一般ノ場合取リ去ルコトハ出来ナイ。